数理解析研究所講究録 1310 巻 2003 年 125-133

対称群の余不変式環とある誘導表現について

森田英章 (東海大学理学部情報数理学科)
中島達洋 (明海大学経済学部)

1. はじめに

n 次対称群 S_n は n 変数多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ($\mathbb{C}$ は複素数体) に変数の入れ替えとして作用している:

$$(w.f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{w(1)}, x_{w(2)}, \ldots, x_{w(n)}),$$

ただし $w \in S_n$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ である. さらに, 各 $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $e_k = e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ で k 次の基本対称式を表し, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ で生成される $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ のイデアル $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ を考えると, その商環 $R_n = \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]/(e_1, \ldots, e_n)$ は S_n の余不変式環とよばれ, S_n の左正則表現を与えることが知られている. $(e_1, \ldots, e_n)$ は斉次イデアルなので, R には自然に次数付き代数の構造が入り, その斉次空間分解を

$$R_n = \bigoplus_{d \geq 0} R_n^d$$

で表すことにする. いま, 各整数 $k = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して, n を法として k と合同な次数を持つ R_n の斉次成分の直和

$$R_n(k; n) = \bigoplus_{d \equiv k \bmod n} R_n^d$$

を考えると, S_n の作用の仕方から明らかなように, $R_n(k; n)$ も再び S_n の表現を与えているが, これらの空間の次元は k によらず一定の値 $(n-1)!$ をとり, しかもそれらは n 次巡回群 C_n の各既約表現を S_n に誘導して得られる表現に同型であることが知られている [KW] [G, Proposition 8.2]. すなわち各 $R_n(k; n)$ は, S_n に一つの部分群 H_n(この場合は n 次巡回群 C_n) を定めておき, その部分群の表現を各 k に対してある一定の方法で構成し (この場合は C_n の既約表現を構成), それを S_n の表現にまで誘導したものとして捉えることが可能なのである. 詳述すると, 巡回置換 $\gamma = (12 \cdots n)$ を考え, γ によって生成される S_n の巡回部分群を $C_n = \langle \gamma \rangle$ とおき, また 1 の原始 n 乗根を $\zeta_n = e^{2\pi\sqrt{-1}/n}$ で表すことにすると, C_n は互いに非同値な n 個の既約表現

$$\psi^{(k)} : C_n \longrightarrow \mathbb{C}^\times : \gamma \longmapsto \zeta_n^k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

をもち, 各 k に対して

$$R_n(k; n) \cong_{S_n} \mathrm{Ind}_{C_n}^{S_n}(\psi^{(k)})$$

となることが知られている. また Kraśkiewicz-Weymann は, これらの表現 $R(k; n)$ における S_n の既約表現 V^λ $(\lambda \vdash n)$ の重複度を, λ 上の標準盤に対する major index を用いて記述している [KW]. (これは後に Garsia によってより精密な形に整備されている [G, Theorem 8.6].)

本稿では, 法をとる数をさらに一般の $l = 1, 2, \ldots, n$ にして, 以上のストーリーを展開する. 各 $k = 0, 1, \ldots, l-1$ に対して

$$R_n(k; l) = \bigoplus_{d \equiv k \bmod l} R_n^d$$

とおいたとき, R_n の次数付指標の値 (Proposision 1) をみることにより, これらの空間の次元は k の値によらず一定値 $n!/l$ であることがわかる (Proposition 4). 従って我々の考えるべき問題は, 各

$l=1,2,\ldots,n$ に対して S_n の部分群 H_l を定め, 各 $k=0,1,\ldots,l-1$ に対してある一定の方法で H_l の表現 $Z(k;l)$ を構成し, この $Z(k;l)$ を S_n にまで誘導したものとして $R(k;l)$ を捉えることの可能性を探ることである. そしてこれが可能であるというのが, 本稿の結論である. この場合においては, $n=dl+r(0\leq r\leq l-1)$ とすると, 部分群 H_l は l 次巡回群 C_l と r 次対称群 S_r の直積 $C_l\times S_r$ に同型なものがとれる (Section 4). そして, 各 $k=0,1,\ldots,l-1$ に対して, ある一定の方法で H_l の表現 $Z(k;l)$ を構成すると (Section 4), $R_n(k;\ l)$ は $Z(k;l)$ を H_l から S_n にまで持ち上げた表現として得られることが示される (Theorem 7).

本稿全体を通じて, $\mathbb{C}$ で複素数体を表し, また (有限) 集合 X に対して $\sharp X$ でその元の個数を表すものとする.

2. 余不変式環とその次数付指標

n を自然数, S_n を n 次対称群とする. また R_n は S_n の左正則表現 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/(e_1,\ldots,e_n)$ とし, $R_n=\bigoplus_{d\geq 0}R_n^d$ はその斉次空間分解とする. R_n の 次数付指標 $\operatorname{char}_q R_n$ は次で定義される：

$$\operatorname{char}_q R_n := \sum_{d\geq 0} q^d \operatorname{char} R_n^d .$$

このとき, 次の式が知られている [G, Proposition 8.1].

Proposition 1. $\lambda=(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots n^{\alpha_n})\vdash n$ に対して

$$\operatorname{char}_q R_n(\lambda)=\frac{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}{(1-q)^{\alpha_1}(1-q^2)^{\alpha_2}\cdots(1-q^n)^{\alpha_n}} .$$

またこれより次がいえる.

Proposition 2. *p は l の約数とし, $n=ep+s$ $(0\leq s<p)$ とする. このとき, θ を 1 の原始 p 乗根とすると, 各 $\lambda\vdash n$ に対して*

$$\operatorname{char}_q R_n(\lambda)\big|_{q=\theta}\neq 0 \Longrightarrow \lambda=(1^{\alpha_1}\cdots s^{\alpha_s}p^e) ,$$

ただし $\alpha_1+\cdots+s\alpha_s=s$ が成り立つ.

Proof. $l=n$ の場合の Stembridge の議論を応用すればよい [S] ([G] も見よ). Proposition 1 より, $\lambda=(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots n^{\alpha_n})\vdash n$ に対して

$$\operatorname{char}_q R_n(\lambda)\big|_{q=\theta}=\left.\frac{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}{(1-q)^{\alpha_1}(1-q^2)^{\alpha_2}\cdots(1-q^n)^{\alpha_n}}\right|_{q=\theta} .$$

このとき右辺の分子において 0 になる因子は $1-q^p,1-q^{2p},\ldots,1-q^{ep}$ の e 個である. 一方, 分母においては $(1-q^p)^{\alpha_p},(1-q^{2p})^{\alpha_{2p}},\ldots,(1-q^{ep})^{\alpha_{ep}}$ の $\alpha_p+\alpha_{2p}+\cdots+\alpha_{ep}$ 個である. ここで

$$p\alpha_p+2p\alpha_{2p}+\cdots+ep\alpha_{ep}\leq\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n=n\ (=ep+s)$$

より

$$\alpha_p+2\alpha_{2p}+\cdots+e\alpha_{ep}\leq e$$

を得る. いま $q=\theta$ として 0 になる $\operatorname{char}_q R_n(\lambda)$ の分子と分母の因子は互いに打ち消し合わねばならないことから,

$$e\leq\alpha_p+\alpha_{2p}+\cdots+\alpha_{ep}\leq\alpha_p+2\alpha_{2p}+\cdots+e\alpha_{ep}\leq e .$$

従って $\alpha_p=e$ を得る.

さて, 再び $\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n=n$ より

$$\alpha_1+\cdots+\widehat{(p\alpha_p)}+\cdots+n\alpha_n=n-ep=s .$$

したがって

$$\alpha_i = 0 \ (s+1 \le i \le n, \ i \ne p), \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + s\alpha_s = s$$

を得る. □

さて $1 \le l \le n$ なる自然数 l と, 各 $0 \le k \le l-1$ に対して

$$R_n(k;l) := \bigoplus_{d \equiv k \bmod l} R_n^d$$

と定義する. すなわち

$$R_n = \bigoplus_{k=0}^{l-1} R_n(k;l).$$

このとき $R_n(k;l)$ の次元は k によらず一定である. まず, 次の補題が必要である.

Lemma 3. t を不定元とする複素係数多項式 $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots$ を考える. $m \ge 2$ は整数とし, ζ は *1* の原始 m 乗根とする. このとき, 次の二つの条件は互いに同値である：

(a) 各 $k = 1, \ldots, m-1$ に対して, $f(\zeta^k) = 0$ が成立する.
(b) $f(t)$ の係数の部分和 $c_l = \sum_{j \ge 1} a_{mj+l}$ は $l = 0, 1, \ldots, m-1$ によらず一定である.

Proof. (b) ⇒ (a): この場合, $f(t)$ は $1 + t + t^2 + \cdots + t^{m-1} = (1-t^m)/(1-t)$ で割り切れることより明らか.

(a) ⇒ (b): 連立一次方程式系

$$f(\zeta^k) = a_0 + a_1\zeta^k + a_2(\zeta^k)^2 + \cdots = 0$$

$(k = 1, \ldots, m-1)$ を考える. これは次の連立一次方程式系を考えることと同値である：

$$\begin{cases} c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \cdots + c_{m-1}\zeta^{m-1} = 0\,, \\ c_0 + c_1\zeta^2 + c_2(\zeta^2)^2 + \cdots + c_{m-1}(\zeta^2)^{m-1} = 0\,, \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_0 + c_1\zeta^{m-1} + c_2(\zeta^{m-1})^2 + \cdots + c_{m-1}(\zeta^{m-1})^{m-1} = 0\,. \end{cases}$$

この連立一次方程式系の係数行列の階数は $m-1$ であるので, その解空間の次元は 1 であり, かつ $(c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}) = (1, 1, \ldots, 1)$ が明らかに解であることから条件 (b) が従う. □

Proposition 4. $l = 1, 2, \ldots, n$ とする. このとき任意の $k = 0, 1, \ldots, l$ に対して, $R_n(k;l)$ の次元は一定である. すなわち

$$\dim R_n(k;l) = \frac{n!}{l}\,.$$

Proof. $l = 1$ の場合は明らかなので, $l \ge 2$ としてよい. Proposition 1 より, $\mathrm{char}_q R_n$ の単位元上での値は

$$\begin{aligned} \mathrm{char}_q R_n(1^n) &= \frac{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}{(1-q)^n} \\ &= (1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-1}) \end{aligned}$$

である. ここで 1 の原始 l 乗根 ζ_l に対して $1 + \zeta_l + \cdots + \zeta_l^{l-1} = 0$ であることに注意する. また, $l = 2, \ldots, n$ のとき, 各 $\zeta_l^k (k = 1, \ldots, l-1)$ は, ある $2 \le m \le l$ に対して, 1 の原始 m 乗根になっているので, Lemma 3 の条件 (a) を満たす. 多項式 $\mathrm{char}_q R_n(1^n)$ の d 次の係数が $\dim R_n^d$ であることに注意すれば, 部分和 $\dim R_n(k;l) = \dim R_n^k + \dim R_n^{k+l} + \cdots$ が k によらず一定であるがわかる. □

以下この表現論的意味付けを与える. $n = dl + r (0 \leq r < l)$ のとき, S_{dl} および S_r を次のように S_n に埋め込んでおく:

$$S_{dl} = \{\sigma \in S_n | \sigma(i) = i \text{ for all } i = dl+1, \ldots, n\},$$
$$S_r = \{\sigma \in S_n | \sigma(i) = i \text{ for all } i = 1, \ldots, dl\}.$$

また $\lambda = (1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdots n^{\alpha_n}) \vdash n$ に対して

$$z_\lambda = 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdots n^{\alpha_n} \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!$$

と定める. C_λ で cycle type が λ の共役類を表すとき, z_λ は $n!/\sharp C_\lambda$ に等しいことに注意する.

Proposition 5. $n = dl + r,\ 0 \leq r \leq l-1$ とする. このとき

$$\mathrm{char}_q R_n \equiv \mathrm{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \mathrm{char}_q (R_{dl} \otimes R_r) \mod q^l - 1 .$$

Proof. これを示すためには, 各 $\lambda \vdash n$ に対して

$$\mathrm{char}_q R_n(\lambda) \equiv \mathrm{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \mathrm{char}_q (R_{dl} \otimes R_r)(\lambda) \mod q^l - 1$$

を示す. これは q に関する高々 $l-1$ 次の多項式の等式と思ってよいので, 1 の原始 p 乗根 θ(p は l の約数) に対して

$$\mathrm{char}_q R_n(\lambda)|_{q=\theta} = \mathrm{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \mathrm{char}_q (R_{dl} \otimes R_r)(\lambda)|_{q=\theta} .$$

を示せば十分である.

Proposition 2 より

$$\mathrm{char}_q R_n(\lambda)|_{q=\theta} \neq 0 \Longrightarrow \lambda = (1^{\alpha_1} \cdots s^{\alpha_s} p^e)$$

である. 従って示すべきことは

(a) $\lambda = (1^{\alpha_1} \cdots s^{\alpha_s} p^e)$ のとき, $\mathrm{char}_q R_n(\lambda)|_{q=\theta} = \mathrm{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \mathrm{char}_q (Rdl \otimes R_r)(\lambda)|_{q=\theta}$,

(b) それ以外の $\lambda \vdash n$ に関しては, $\mathrm{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \mathrm{char}_q (R_{dl} \otimes R_r)(\lambda)|_{q=\theta} = 0$.

の二つである.

$\lambda \vdash n$ に対して C_λ で S_n の cycle type indicator を表すことにする. すなわち, C_λ は S_n 上の関数で, 次のように定義される:

$$C_\lambda(\sigma) = \begin{cases} 1, & \lambda(\sigma) = \lambda, \\ 0, & \lambda(\sigma) \neq \lambda. \end{cases}$$

ただし $\lambda(\sigma)$ は $\sigma \in S_n$ の cycle type を表す. また, S_n 上の二つの関数 f, g に対して

$$\langle f, g \rangle_{S_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) g(\sigma)$$

と定めると, S_n 上の任意の類関数 ϕ に対して

$$\langle \phi, C_\lambda \rangle_{S_n} = z_\lambda^{-1} \phi(\lambda)$$

であることに注意する. 従って (a) を示すには, $\lambda = (1^{\alpha_1} \cdots s^{\alpha_s} p^e)$ に対して

$$\left. \langle \mathrm{char}_q R_n, C_\lambda \rangle_{S_n} \right|_{q=\theta} = \left. \left\langle \mathrm{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \mathrm{char}_q \left(R^{S_{dl}} \otimes R^{S_r} \right), C_\lambda \right\rangle_{S_n} \right|_{q=\theta}$$

を示せばよい. この式の左辺は, Proposition 1 より

$$\left. z_\lambda^{-1} \frac{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)}{(1-q)^{\alpha_1} \cdots (1-q^s)^{\alpha_s} (1-q^p)^e} \right|_{q=\theta}$$

に等しいことがわかる．右辺の値を計算しよう．$\lambda = (1^{\alpha_1} \cdots s^{\alpha_s} p^e)$ のとき，

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathrm{Ind}_{S_{dl}\times S_r}^{S_n} \mathrm{char}_q (R_{dl}\otimes R_r), C_\lambda \right\rangle_{S_n}\Big|_{q=\theta} \\
&= \left\langle \mathrm{char}_q (R_{dl}\otimes R_r), \mathrm{Res}_{S_{dl}\times S_r}^{S_n} C_\lambda \right\rangle_{S_{dl}\times S_r}\Big|_{q=\theta} \\
&= \frac{1}{(dl)!r!} \sum_{(\sigma,\tau)\in S_{dl}\times S_r} \mathrm{char}_q (R_{dl}\otimes R_r)(\sigma,\tau) C_\lambda(\sigma,\tau)\big|_{q=\theta}
\end{aligned}$$

さて，$\lambda = (1^{\alpha_1} \cdots s^{\alpha_s} p^e)$ を dl と r の分割に分ける分け方は $(p^{e-f}) \vdash dl$ と $(1^{\alpha_1} \cdots s^{\alpha_s} p^f) \vdash r$ の一通りしかないことに注意すると，$(\sigma,\tau) \in S_{dl}\times S_r$ に対して，

$$C_\lambda(\sigma,\tau) = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda(\sigma) = \left(p^{d\frac{l}{p}}\right) = \left(p^{e-f}\right) \vdash dl \\ \lambda(\tau) = \left(1^{\alpha_1} \cdots s^{\alpha_s} p^f\right) \vdash r, \end{cases}$$

ただし

$$\begin{aligned} n &= dl + r \quad (0 \le r \le l-1) \\ &= ep + s \quad (0 \le s \le p-1), \end{aligned}$$

および $r = fp + s$ $(0 \le s \le p)$ である．(よって $dl/p = e - f$.) 従って

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(dl)!r!} \sum_{(\sigma,\tau)\in S_{dl}\times S_r} \mathrm{char}_q (R_{dl}\otimes R_r)(\sigma,\tau) C_\lambda(\sigma,\tau)\big|_{q=\theta} \\
&= \frac{\sharp C_{(p^{e-f})}}{(dl)!} \frac{\sharp C_{(1^{\alpha_1}\cdots s^{\alpha_s}p^f)}}{r!} \ \mathrm{char}_q R_{dl}(p^{e-f}) \ \mathrm{char}_q R_r(1^{\alpha_1}\cdots s^{\alpha_s}p^f)\Big|_{q=\theta} \\
&= z_{(p^{e-f})}^{-1} z_{(1^{\alpha_1}\cdots s^{\alpha_s}p^f)}^{-1} \frac{(1-q)\cdots(1-q^{dl})}{(1-q^p)^{e-f}} \frac{(1-q)\cdots(1-q^r)}{(1-q)^{\alpha_1}\cdots(1-q^s)^{\alpha_s}(1-q^p)^f}\Bigg|_{q=\theta} \\
&= z_{(p^{e-f})}^{-1} z_{(1^{\alpha_1}\cdots s^{\alpha_s}p^f)}^{-1} \binom{e}{f}^{-1} \frac{(1-q)\cdots(1-q^{dl})(1-q^{1+dl})\cdots(1-q^{r+dl})}{(1-q)^{\alpha_1}\cdots(1-q^s)^{\alpha_s}(1-q^p)^e}\Bigg|_{q=\theta} \\
&= z_\lambda^{-1} \frac{(1-q)\cdots(1-q^{dl})(1-q^{1+dl})\cdots(1-q^{r+dl})}{(1-q)^{\alpha_1}\cdots(1-q^s)^{\alpha_s}(1-q^p)^e}\Bigg|_{q=\theta} \\
&= \langle \mathrm{char}_q R_n, C_\lambda \rangle_{S_n}\Big|_{q=\theta} .
\end{aligned}$$

これで (a) が示せた．次に (b) を示す．そこで

$$\left\langle \mathrm{char}_q (R_{dl}\otimes R_r), \mathrm{Res}_{S_{dl}\times S_r}^{S_n} C_\lambda \right\rangle_{S_{dl}\times S_r}\Big|_{q=\theta} \ne 0$$

と仮定する．このとき

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathrm{char}_q (R_{dl}\otimes R_r), \mathrm{Res}_{S_{dl}\times S_r}^{S_n} C_\lambda \right\rangle_{S_{dl}\times S_r}\Big|_{q=\theta} \\
&= \frac{1}{(dl)!r!} \sum_{(\sigma,\tau)\in S_{dl}\times S_r} \mathrm{char}_q (R_{dl}\otimes R_r)(\sigma,\tau) C_\lambda(\sigma,\tau)\Bigg|_{q=\theta}
\end{aligned}$$

なので, ある $(\sigma,\tau)\in S_{dl}\times S_r$ が存在して,

$$\mathrm{char}_q\ (R_{dl}\otimes R_r)(\sigma,\tau)|_{q=\theta}=\mathrm{char}_q\ R_{dl}(\sigma)|_{q=\theta}\,\mathrm{char}_q\ R_r(\tau)|_{q=\theta}\neq 0.$$

したがって

$$\mathrm{char}_q\ R_{dl}(\sigma)|_{q=\theta}\neq 0,\quad \mathrm{char}_q\ R_r(\tau)|_{q=\theta}\neq 0$$

でなければならない. よって, $\lambda(\sigma)=(p^{\frac{dl}{p}})=(p^{e-f})$ かつ $\lambda(\tau)=(1^{\alpha_1}\cdots s^{\alpha_s}p^f)$ が従う. 一方, このような (σ,τ) に対して $C_\lambda(\sigma,\tau)\neq 0$ が成り立たねばならない. そしてこのとき $\lambda=\lambda(\sigma)\cup\lambda(\tau)$ である. よって $\lambda=\lambda(\sigma)\cup\lambda(\tau)=(1^{\alpha_1}\cdots s^{\alpha_s}p^e)$. □

3. n が l で割り切れる場合について

n は自然数, l はその約数とする. C_l で l 次の巡回群をあらわす. よく知られているように, C_l の既約表現は l 個ある. それらを $\psi^{(0)},\ldots,\psi^{(l-1)}$ であらわすことにする. ただし,

$$\psi^{(k)}\ :\ C_l\longrightarrow\mathbb{C}^\times\ :\ \gamma\longmapsto\zeta_l^k$$

とする. ここで γ は長さ l の巡回置換 $(12\cdots l)$, ζ_l は 1 の原始 l 乗根とする. また C_l を, 次のように S_n に埋め込む:

$$C_l\cong\langle\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_d\rangle\subset S_n\ ,$$

ただし $\gamma_1=(1,2,\ldots,l)$, $\gamma_2=(l+1,l+1,\ldots,2l)$, …, $\gamma_d=((d-1)l+1,\ldots,dl)$.

そして各 $k=0,\ldots,l-1$ に対して

$$\tau^{(k)}:=\frac{1}{l}\sum_{i=0}^{l-1}\zeta_l^{-ik}(\gamma_1\ldots\gamma_d)^i$$

とおくと, これはベキ等元になっている.

一般に S_n の群環 $\mathbb{C}[S_n]$ のベキ等元 ρ により生成される $\mathbb{C}[S_n]$ の左イデアル $\mathbb{C}[S_n]\rho$ によって与えられる S_n の表現の指標は, 下で定義される作用素 Γ_n を用いて $\Gamma_n\rho$ で得られる (see e.g., [G, Proposition 5.2] [R, Lemma 8.4]):

$$\Gamma_n\ :\ \mathbb{C}[S_n]\longrightarrow\mathbb{C}[S_n]\ :\ \rho\longmapsto\sum_{\sigma\in S_n}\sigma^{-1}\rho\sigma\,.$$

従って,

$$\mathrm{Ind}_{C_l}^{S_n}\mathrm{char}(\psi^{(k)})=\Gamma_n\tau^{(k)}\ .$$

さて Proposition 3 より, 各 $k=0,1,\ldots,l-1$ に対して, 我々の空間

$$R_n(k;l)=\bigoplus_{d\equiv k\ \mathrm{mod}\ l}R_n^d y$$

の次元は一定であるが, 我々が指摘したいのは次の事実である.

Proposition 6. 各 $k=0,1,\ldots,l-1$ に対して

$$R_n(k;l)\ \cong_{S_n}\ \mathrm{Ind}_{C_l}^{S_n}(\psi^{(k)}).$$

Proof. 次を示せばよい:

$$\mathrm{char}_q R_n\equiv\sum_{k=0}^{l-1}q^k\,\mathrm{Ind}_{C_l}^{S_n}\mathrm{char}(\psi^{(k)})\quad\mathrm{mod}\quad q^l-1\,.$$

先程と同様に, q に ζ_l^s $(s=0,1,\ldots,l-1,\ \zeta_l$ は 1 の原始 l 乗根) を代入したときの両辺の相等をみれ

ここでまず $k=0,\dots,l-1$ に対して

$$\mathrm{Ind}_{C_l}^{S_n}(\psi^{(k)}) \cong_{S_n} \mathbb{C}[S_n]\tau^{(k)}$$

が誘導表現に関する基本的な議論より従うことに注意する. 従って

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{C_l}^{S_n}\operatorname{char}(\psi^{(k)}) &= \operatorname{char}\mathbb{C}[S_n]\tau^{(k)}\\ &= \Gamma_n\tau^{(k)}\end{aligned}$$

である. よって件の式の右辺は

$$\sum_{k=0}^{l-1} q^k\,\mathrm{Ind}_{C_l}^{S_n}\operatorname{char}(\psi^{(k)}) = \sum_{k=0}^{l-1} q^k\Gamma_n\tau^{(k)}$$

となる. ここで $q=\zeta_l^s$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{l-1}(\zeta_l^s)^k\Gamma_n\tau^{(k)} &= \Gamma_n(\gamma_1\cdots\gamma_d)^s\sum_{k=0}^{l-1}\tau^{(k)}\\ &= \Gamma_n(\gamma_1\cdots\gamma_d)^s.\end{aligned}$$

を得る. 従って示すべきは

$$\operatorname{char}_q R_n(\lambda)|_{q=\zeta_l^s} = \begin{cases} z_\lambda, & \lambda=\lambda((\gamma_1\cdots\gamma_d)^s),\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

すなわち, l の各約数 p に対して, θ を 1 の原始 p 乗根としたとき,

$$\operatorname{char}_q R_n(\lambda)|_{q=\theta} = \begin{cases} z_{(p^{\frac{n}{p}})}, & \lambda=(p^{\frac{n}{p}})\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

を示せばよいことになるが, これは Proposition 2 と Proposition 1 よりすぐに従う. □

4. 主定理

n は自然数, l は $1\le l\le n$ を満たす整数とする. また $n=dl+r$, ただし $0\le r\le l-1$ としておく. また R_n は S_n の余不変式環とし, $R_n=\bigoplus_{d\ge 0}R_n^d$ は斉次空間分解とする. そして各 $k=0,1,\dots,l-1$ に対して

$$R_n(k;\,l) := \bigoplus_{d\equiv k \bmod l} R_n^d$$

と定義した.

さて, 各 $l=1,2,\dots,n$ に対して, S_n の部分群 H_l を次のように定義する:

$$\begin{aligned} H_l &:= \langle\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_d\rangle\times S_r\\ &\cong C_l\times S_r\,,\end{aligned}$$

ただし各 $i=1,2,\dots,d$ に対して γ_i は巡回置換 $((i-1)l+1,(i-1)l+2,\dots,il)$ を表すものとし, また S_r は S_n の文字 $1,\dots,n-r$ に対する固定部分群である。

また, 各 $k=0,1,\dots,l-1$ に対して H_l の表現 $Z(k;l)$ を次の様に定義する:$n=dl+r$ $(0\le r\le l-1)$ のとき

$$Z(k;l) := \bigoplus_{\lambda\vdash r}\ \bigoplus_{T\in\mathrm{STab}(\lambda)} \psi^{(k-\mathrm{maj}(T))}\otimes V^\lambda\,,$$

ただし, V^λ は λ によってパラメトライズされる S_r の既約表現である. これらの表現の次元は k によらず一定であり, 従ってそれを S_n にまで誘導した $\mathrm{Ind}_{H_l}^{S_n} Z(k;\ l)$ の次元も再び, k によらず一定であることに注意する. 実際,

$$\begin{aligned}
\dim Z(k;l) &= \sum_{\lambda\vdash r}\sum_{T\in\mathrm{STab}(\lambda)} \dim \psi^{(k-\mathrm{maj}(T))}\otimes V^\lambda \\
&= \sum_{\lambda\vdash r}\sum_{T\in\mathrm{STab}(\lambda)} \sharp\mathrm{STab}(\lambda) \\
&= \sum_{\lambda\vdash r} \sharp\mathrm{STab}(\lambda)^2 \\
&= r!,
\end{aligned}$$

である. 従って

$$\dim \mathrm{Ind}_{H_l}^{S_n}(Z(k;l)) = r! \times \frac{n!}{lr!} = \frac{n!}{l}$$

となり, これは Proposition 4 より, $R_n(k;l)$ の次元に等しい. 実はこの両者は S_n の表現として同値なのである.

Theorem 7 (Main result). $l=1,2,\ldots,n$ とする. このとき, 各 $k=0,1,\ldots,l-1$ に対して次が成り立つ:

$$R_n(k;\ l) \cong_{S_n} \mathrm{Ind}_{H_l}^{S_n}(Z(k;l))$$

Proof. 任意の $\lambda\vdash n$ に対して, 次を示せばよい:

$$\mathrm{char}_q R_n(\lambda) \equiv \sum_{k=0}^{l-1} q^k \sum_{\lambda\vdash r}\sum_{T\in\mathrm{STab}(\lambda)} \mathrm{Ind}_{H_l}^{S_n}\mathrm{char}\left(\psi^{(k-\mathrm{maj}(T))}\otimes V^\lambda\right)(\lambda) \mod q^l-1. \qquad (*)$$

$n=dl+r$, ただし $0\le r\le l-1$ とし, S_{dl} を文字 $dl+1,\ldots,n$ に対する S_n の固定化部分群とする. H_l は $S_{dl}\times S_r$ の部分群であるから

$$\mathrm{Ind}_{H_l}^{S_n}\left(\psi^{(k-\mathrm{maj}(T))}\otimes V^\lambda\right) \cong_{S_n} \mathrm{Ind}_{S_{dl}\times S_r}^{S_n}\left(\mathrm{Ind}_{H_l}^{S_{dl}\times S_r}\left(\psi^{(k-\mathrm{maj}(T))}\otimes V^\lambda\right)\right),$$

が, 任意の $\lambda\vdash n$ に対して成立する. よって (2) 式の右辺は, 以下のように計算される:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{\lambda\vdash r}\sum_{T\in\mathrm{STab}(\lambda)} q^k\,\mathrm{Ind}_{S_{dl}\times S_r}^{S_n}\mathrm{Ind}_{C_l\times S_r}^{S_{dl}\times S_r}\mathrm{char}(\psi^{(k-\mathrm{maj}(T))}\otimes V^\lambda) \\
&= \mathrm{Ind}_{S_{dl}\times S_r}^{S_n}\left(\sum_k\sum_\lambda\sum_T q^k\,\mathrm{Ind}_{C_l}^{S_{dl}}\mathrm{char}(\psi^{(k-\mathrm{maj}(T))})\cdot\mathrm{char}(V^\lambda)\right) \\
&= \mathrm{Ind}_{S_{dl}\times S_r}^{S_n}\left(\sum_k\sum_\lambda\sum_T q^{k-\mathrm{maj}(T)}\,\mathrm{Ind}_{C_l}^{S_{dl}}\mathrm{char}(\psi^{(k-\mathrm{maj}(T))})\cdot q^{\mathrm{maj}(T)}\mathrm{char}(V^\lambda)\right). \qquad (**)
\end{aligned}$$

ここで

$$\sum_k q^{k-\mathrm{maj}(T)}\,\mathrm{Ind}_{C_l}^{S_{dl}}\mathrm{char}(\psi^{(k-\mathrm{maj}(T))}) \equiv \sum_k q^k\,\mathrm{Ind}_{C_l}^{S_{dl}}\mathrm{char}(\psi^{(k)}) \mod q^l-1\ .$$

に注意すれば, この式の右辺は $\mathrm{char}_q R_{dl}$ に q^l-1 を法として合同であることがわかる. 一方, Kraśkiewicz - Weymann の結果より

$$[R_d^{(n)} : V^\lambda] = \sharp\{T\in\mathrm{STab}(\lambda) \mid \mathrm{maj}(T)=d\}$$

となる [G, Theorem 8.6][R, Theorem 8.8] ので,

$$\mathrm{char}_q R_r = \sum_{\lambda \vdash r} \sum_{T \in \mathrm{STab}(\lambda)} q^{\mathrm{maj}(T)} \mathrm{char}(V^{\lambda}) .$$

を得る. このことから (**) 式は

$$\mathrm{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} (\mathrm{char}_q R_{dl} \cdot \mathrm{char}_q R_r) = \mathrm{Ind}_{S_{dl} \times S_r}^{S_n} \mathrm{char}_q (R_{dl} \otimes R_r)$$

に等しく, あとは Proposition 5 により $\mathrm{char}_q R_n$ に $q^l - 1$ を法として合同であることが従う. □

また, λ を n の分割としたとき, S_n の既約表現 V^{λ} の $R(k\,;\,l)$ における重複度は次で与えられる.

Proposition 8. $[R_n(k;l) : V^{\lambda}] = \sharp\{T \in \mathrm{STab}(\lambda) \mid \mathrm{maj}(T) \equiv k \bmod l\}$.

Proof. S_n の余不変式環 $R_n = \bigoplus_{d \geq 0} R_n^d$ の斉 d 次空間 R_n^d における V^{λ} の重複度 $[R_n^d : V^{\lambda}]$ は, [G, Theorem 8.6] により

$$[R_n^d : V^{\lambda}] = \sharp\{T \in \mathrm{STab}(\lambda) | \mathrm{maj}(T) = d\}$$

で与えられる. この事実より, 命題はすぐに従う. □

Example 9. $n = 5$ のとき $l = 3$ とする. この場合, 部分群 H_3 は $\langle(123)\rangle \times \langle(45)\rangle$ となり, これは $C_3 \times S_2$ に同型である. このとき

$$R_5(k;3) \cong_{S_5} \left(\psi^{(k)} \otimes V^{(2)}\right)\Big\uparrow_{H_3}^{S_5}$$

が, 各 $k = 0, 1, 2$ に対して成立している. また $n = 11$, $l = 4$ $(r = 3)$ の場合には, H_4 は $\langle(1234)(5678)\rangle \times \langle(9, 10), (10, 11)\rangle$ で与えらる $C_4 \times S_2$ に同型な部分群である. そして, 各 $k = 0, 1, 2, 3$ に対して, $R_{(11)}(k; 4)$ は以下に上げた H_4 の表現を S_{11} に誘導したものと同値である:

$$\begin{aligned}
Z(0;4) &= (\psi^{(0)} \otimes V^{(3)}) \oplus (\psi^{(3)} \otimes V^{(2,1)}) \oplus (\psi^{(2)} \otimes V^{(2,1)}) \oplus (\psi^{(1)} \otimes V^{(1,1,1)}) , \\
Z(1;4) &= (\psi^{(1)} \otimes V^{(3)}) \oplus (\psi^{(0)} \otimes V^{(2,1)}) \oplus (\psi^{(3)} \otimes V^{(2,1)}) \oplus (\psi^{(2)} \otimes V^{(1,1,1)}) , \\
Z(2;4) &= (\psi^{(2)} \otimes V^{(3)}) \oplus (\psi^{(1)} \otimes V^{(2,1)}) \oplus (\psi^{(0)} \otimes V^{(2,1)}) \oplus (\psi^{(3)} \otimes V^{(1,1,1)}) , \\
Z(3;4) &= (\psi^{(3)} \otimes V^{(3)}) \oplus (\psi^{(2)} \otimes V^{(2,1)}) \oplus (\psi^{(1)} \otimes V^{(2,1)}) \oplus (\psi^{(0)} \otimes V^{(1,1,1)}) .
\end{aligned}$$

References

[G] A. M. Garsia, Combinatorics of the free Lie algebra and the symmetric group, in *Analysis, et cetera..., Jürgen Moser Festschrift*. Academic Press, New York, 1990, pp. 309-382.

[KW] W. Kraśkiewicz and J. Weymann, Algebra of coinvariants and the action of Coxeter elements, preprint, Math. Inst. Univ. Copernic, Torunń, Poland, 1987.

[Mac] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed., Oxford University Press, 1995.

[R] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[S] J. R. Stembridge, Cyclic exponents for symmetric groups, reflection groups and wreath products.

[W] H. Weyl, *The Classical Groups, Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, 1946.